

5- AMALIY MASHG'ULOT

Mavzu: Algoritmalar tahlili.

Ishning maqsadi: Algoritm o'lish tezliklarini tahlil qilish. Katta omega, katta o va katta teta funksiyalar sinflari asosida algoritmarni tahlil qilish.

Vazifa:

1. Algoritmarning o'lish tezliklarini tasniflash.
2. Katta omega, katta O, katta teta sinflari tahlili.

Nazariy qism

Algoritmning amallari soni uni tahlil qilishda muhim rol o'ynamaydi. Kiruvchi ma'lumotlarning hajmi ko'payganida bu sonning o'lish tezligi muhimroq hisoblanadi. U algoritmning **o'lish tezligi** deb ataladi.

O'lish tezliklarini tasniflash.

Algoritm murakkabligining o'lish tezligi muhim rol o'ynaydi va biz o'lish tezligi formulasi kata ustunlikka ega hadi bilan aniqlanishini ko'rdik. Shuning uchun biz sekin o'sadigan kichik hadlarga e'tibor qaratmaymiz. Barcha kichik hadlarni olib tashlab, murakkablikning o'lish tezligi hisoblanuvchi algoritm yoki funksiyaning tartibiga ega bo'lamiz. Algoritmarni ular murakkabligining o'lish tezligiga qarab guruhlariga ajratish mumkin. Biz 3 toifani kiritamiz: murakkabligi mazkur funksiya kabi tez o'suvchi algoritmalar, murakkabliklari o'sha tezlikda o'suvchi algoritmalar va murakkabligi bu funksiyadan sekin o'suvchi algoritmalar.

Katta omega

f singari tez o'suvchi funksiyalar sinfini biz $\Omega(f)$ orqali belgilaymiz (katta omega deb o'qiladi). Agar hamma qiymatlarda erkin o'zgaruvchan kattalik n va musbat c son uchun $g(n) > c f(n)$ o'rinli bo'lsa, g funksiya shu sinfga tegishli bo'ladi. $\Omega(f)$ sinfi o'zining quyi chegarasi bilan izohlansa, undagi hamma funksiyalar f kabi tez o'sadi.

Biz algoritmning samaradorligi bilan qiziqamiz, shuning uchun $\Omega(f)$ sinfi bizni u darajada qiziqitmaydi: masalan, $\Omega(n^2)$ ga n^2 dan tez o'suvchi hamma funksiyalar kiradi, aytaylik n^3 va 2^n .

Katta O

Spektrning boshqa tarafida $O(f)$ sinfi joylashgan (katta O deb o'qiladi). Bu sinf f dan tez o'smaydigan funksiyalardan tashkil topgan. Funksiya f , $O(f)$ sinflari uchun yuqori chegarani belgilaydi. Formal nuqtai nazardan g funksiyasi $O(f)$ sinfiga tegishli, agar barcha n va qandaydir musbat c konstanta uchun $g(n) < c f(n)$ o'rinli bo'lsa.

Bu sinf biz uchun juda muhim. Ikkita algoritmning birinchisining murakkabligi ikkinchisiga qaraganda katta O sinfiga tegishli bo'lsa, u holda ikkinchi algoritm birinchisiga qaraganda qo'yilgan masalani yaxshi yecha olmaydi.

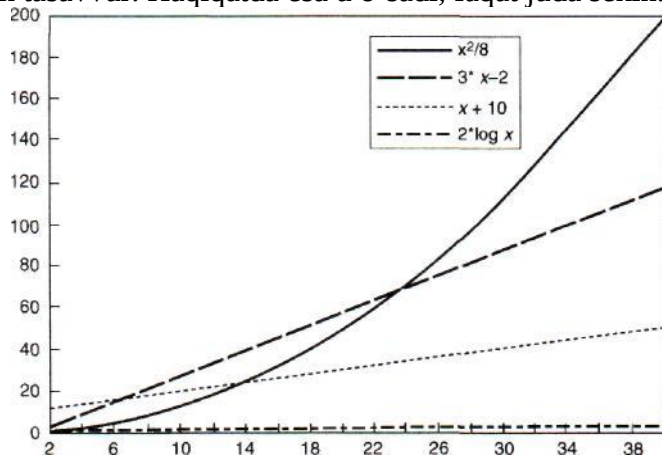
Katta teta

$\Theta(f)$ orqali biz f singari tezlikda o'suvchi funksiyalar sinfini belgilaymiz (katta teta deb o'qiladi). Formal nuqtai nazardan bu sinf ikki avvalgi sinflarning kesishmasidan iborat, $\Theta(f) = \Omega(f) \cap O(f)$.

Algoritmarni taqqoslaganda bizni qarayotgan masalani o'rganilganlaridan ko'ra tezroq yechadiganlari qiziqtiradi. Shuning uchun agar topilgan algoritm Θ sinfiga tegishli bo'lsa, u bizni unchalik qiziqitmaydi.

II. Amaliy qism

Agar **1-rasm**ga diqqat bilan qarasak, funksiya grafiklarining quyidagi xususiyatlarini ko`rsatish mumkin.  $x^2$  funksiya avval sekin o`sadi, lekin x o`sganda uning o`sish tezligi ham oshadi. x funksiyasining o`sish tezligi o`zgaruvchining hamma qiymatlari oralig`ida doimiydir.  $2 \log x$  funksiyasi umuman o`smaydi, lekin bu yolg`on tasavvur. Haqiqatda esa u o`sadi, faqat juda sekin.



1 – rasm. To`rtta funksiyaning grafigi.

Funksiya qiymatlarining nisbiy balandligi biz ko`rib chiqayotgan o`zgaruvchining qiymatlari katta yoki kichikligiga bog`liq. $x=2$ da funksiya qiymatini taqqoslaymiz. Bu nuqtadagi eng kichik qiymatli funksiya $x^2/8$; eng kata qiymatli funksiya $x+10$ hisoblanadi. Biroq x ortishi bilan $x^2/8$ funksiya osha boshlaydi.

Algoritmni tahlil qilish paytida bizni algoritmning o`sish tezligi qiziqtiradi. Funksiyaning nisbiy «o`lchami» bizni x o`zgaruvchining katta qiymatlarida qiziqtiradi.

Ba`zi ko`p uchraydigan funksiya sinflari 2-rasmdagi jadvalda keltirilgan. Bu jadvalda biz berilgan sinfnig funksiya qiymatini erkin o`zgaruvchan kattalik qiymatining keng diapazonida keltirdik. Ko`rinib turibdiki, kiruvchi ma`lumotlarning oz o`lchamlarida funksiya qiymatlari sezilarli farq qilmaydi, ammo bu o`lchamlari o`sganda farq sezilarli oshadi. Bu jadval 1-rasmga qaraganda taassurotni kuchaytiradi. Shuning uchun biz kiruvchi ma`lumotlarning katta hajmlarida nima sodir bo`lishini o`rganamiz, kichik hajmlardagi farq ko`rinmas bo`lganligi sababli.

1 va 2-rasmlardagi ma`lumotlar funksiyalarning yana bir xossasini namoyish etadi. Tez o`sovchi funksiyalar sekin o`sovchi funksiyalardan ustunlik qiladi. Shuning uchun biz agar algoritm murakkabligi ikki yoki bir necha funksiyalar yig`indisidan iborat bo`lsa, tez o`sovchi funksiyalardan tashqari barcha funksiyalarni olib tashlaymiz.

	$\log_2 n$	n	$n \log_2 n$	n^2	n^3	2^n
1	0.0	1.0	0.0	1.0	1.0	2.0
2	1.0	2.0	2.0	4.0	8.0	4.0
5	2.3	5.0	11.6	25.0	125.0	32.0
10	3.3	10.0	33.2	100.0	1000.0	1024.0
15	3.9	15.0	58.6	225.0	3375.0	32768.0
20	4.3	20.0	86.4	400.0	8000.0	1048576.0
30	4.9	30.0	147.2	900.0	27000.0	1073741824.0
40	5.3	40.0	212.9	1600.0	64000.0	1099511627776.0
50	5.6	50.0	282.2	2500.0	125000.0	1125899906842620.0
60	5.9	60.0	354.4	3600.0	216000.0	1152921504606850000.0
70	6.1	70.0	429.0	4900.0	343000.0	1180591620717410000000.0
80	6.3	80.0	505.8	6400.0	512000.0	1208925819614630000000000.0
90	6.5	90.0	584.3	8100.0	729000.0	1237940039285380000000000000.0
100	6.6	100.0	664.4	10000.0	1000000.0	1267650600228230000000000000000.0

2 – rasm. Funksiyalarning o`sish sinflari

Masalan, agar biz algoritmni tahlil qilganda, uning x^3-30x taqqoslash qilinishini bilsak, algoritmning murakkabligi x^3 kabi o'sadi, deymiz. Buning sababi shundaki, 100 ta kiruvchi raqamlarda x^3 va orasidagi farq atiga 0,3 % ni tashkil qiladi. Keyingi bo'limda biz bu fikrni formallashtiramiz.

Katta O sinfining tavsifi

Berilgan funksiya $O(f)$ ga tegishli ekanligini ikki xil yo'l bilan tekshirish mumkin: yuqoridagi tavsif orqali yoki quyidagi tavsif yordamida:

$$g \in O(f), \text{ agar } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = c \text{ ixtiyoriy } c \text{ konstanta uchun.}$$

Bu shuni anglatadiki, $g(n) / f(n)$ ning munosabatlar chegarasi mavjud bo'lsa va u cheksizlikdan kichik bo'lsa, $g \in O(f)$ bo'ladi. Ba'zi funksiyalar uchun buni tekshirish oson emas. Lopital qoidasiga ko'ra, bunday holda funksiyalar limitini ularning hosilasi limitiga almashtirish mumkin.

Belgilash

$\Theta(f)$, $\Omega(f)$ va $O(f)$ sinflarining har biri to'plam hisoblanadi, shuning uchun «g – shu to'plam elementi» iborasi ahamiyatlidir. Biroq, tahlillarda $g = O(f)$ deb yozishadi, aslida esa $g \in O(f)$.

TOPSHIRIQLAR:

1. Quyidagi funksiyalarni o'sish tartibida joylashtiring. Agar ularning ba'zilar bir xil tezlikda o'suvchi bo'lsa, ularni alohida ajratib ko'rsating:

2^n	$\log_2 \log_2 n$	$n^3 + \log_2 n$
$\log_2 n$	$n - n^2 + 5n^3$	2^{n-1}
n^2	n^3	$n \log_2 n$
$(\log_2 n)^2$	$\sqrt{n}$	6
$n!$	n	$(3/2)^n$

2. Quyida keltirilgan funksiyalar jufti uchun $f = O(g)$ yoki $g = O(f)$ tengliklardan biri o'rinli bo'lishini aniqlang:

- $f(n) = (n^2 - n) / 2, \quad g(n) = 6n$
- $f(n) = n + 2\sqrt{n}, \quad g(n) = n^2$
- $f(n) = n + n \log_2 n, \quad g(n) = n\sqrt{n}$
- $f(n) = n^2 + 3n + 4, \quad g(n) = n^3$
- $f(n) = n \log_2 n, \quad g(n) = n\sqrt{n} / 2$
- $f(n) = n + \log_2 n, \quad g(n) = \sqrt{n}$
- $f(n) = 2 \log_2 n^2, \quad g(n) = \log_2 n + 1$
- $f(n) = 4n \log_2 n + n, \quad g(n) = (n^2 - n) / 2$

3. Quyida keltirilgan funksiyalarning o'sish tezliklarini tavsiflang:

- $\log N$
- N
- $N \log N$
- N^2
- N^3
- 2^N