

10 - AMALIY MASHG'ULOT

Mavzu: Determinallanmagan hisoblashlar va NP masalalar sinfi

Ishning maqsadi: Determinallangan va determinallanmagan algoritmlar tahlili. P, NP va NP-to'liq masalalar sinfi. Ko'phadlarning qiymatlarini hisoblashda va matritsalar ustida amallar bajarish uchun mo'ljallangan algoritmlarning bajariladigan amallar soniga nisbatan mukammalligini tekshirish.

I. Nazariy qism

NP nima?

Avvalgi mashg'ulotlarimizda ko'zdan kechirilgan barcha algoritmlar polinomial murakkablikka ega edi. Undan tashqari, ularning hammasining murakkabligi $O(N^3)$ edi, kompleks ko'paytirish algoritmi esa eng ko'p vaqt talab qiluvchi edi. Biroq, asosiysi, biz bu masalalarning aniq yechimini idrokli vaqt ichida topa olar edik. Bu masalalarning hammasi P sinfiga – polinomial murakkablikka ega masalalar sinfiga tegishli. Bunday masalalar deyarli yechiladigan hisoblanadi.

Yana boshqa masalalar sinfi ham bor: ular deyarli hal qilinmaydi va biz ularni idrokli vaqtda yecha oladigan algoritmlarni bilmaymiz. Bu masalalar NP sinfini hosil qiladi, ya'ni determinallanmagan polinomial murakkablikka ega. Faqat shuni aytish mumkinki, bu masalalarni yechuvchi barcha ma'lum determinallangan algoritmlar yoki eksponensial, yoki faktorial murakkablikka ega bo'ladi. Ulardan ba'zilarining murakkabligi 2^N ga teng, bu yerda N – kiruvchi berilganlar soni. Bu holda kiruvchi berilganlar ro'yxatiga bitta elementni qo'shsak, algoritmning ishlash vaqti ikki barobar ortadi. Agar bunday masalani yechish uchun kiruvchi o'nta element uchun algoritimga 1024 ta amal talab qilingan bo'lsa, kiruvchi 11 ta element uchun amallar soni 2048 ni tashkil qiladi. Bu esa, kiruvchi berilganlarning soni kamgina oshirilganda vaqtning sezilarli ortishidir.

NP sinfidagi masalalarni xarakterlovchi «Determinallanmagan polinomial» so'z birikmasi uni yechishda quyidagi ikki qadamli yondashuv hisoblanadi. Birinchi qadamda bunday masalaning yechimini tasvirllovchi determinallanmagan algoritmi mavjud bo'lib, u yechimni topishga urinish deyish mumkin. Ba'zan bunday urinish muvaffaqiyatli bo'lib, biz optimal yoki optimalga yaqin yechimni topamiz, ba'zida esa muvaffaqiyatsiz (optimaldan javobdan ancha uzoq) yakunlanadi. Ikkinchi qadamda, birinchi qadamda olingan yechim qaralayotgan masalaning yechimi bo'la olishi tekshiriladi. Bu qadamlarning har biri alohida polinomial vaqtni talab qiladi. Muammo shundaki, izlangan yechimni olish uchun bu qadamlarni necha marta takrorlashimiz kerakligini biz bilmaymiz. Ikkala qadam polinomial bo'lsa ham, ularga murojaat eksponensial yoki faktorial bo'lishi mumkin.

Kommivoyajer masalasi NP sinfiga tegishli. Bizga shaharlar to'plami va ularning har bir ikkitasi orasidagi sayohat «narxi» berilgan. Shunday tartibni aniqlash kerakki, hamma shaharlarga tashrif buyurib, dastlabki shaharga qaytib kelganda, sayohatning umumiy narxi minimal bo'lsin. Bu masalani, masalan, shahar ko'chalaridagi axlatni samarali yig'ishtirish tartibini aniqlash yoki kompyuter tarmog'ining hamma bo'g'inlarida axborotni tez tarqatish yo'lini tanlashda qo'llash mumkin. Sakkizta shaharni 40 320 mavjud usul bilan tartiblash mumkin, o'nta shahar uchun bu son 3 628 800 ga ortadi. Qisqa yo'lni tanlash ushbu hamma imkoniyatlarni ko'rib chiqishni talab qiladi. Faraz qilaylik, bizda ko'rsatilgan tartibda 15 ta shahar orqali sayohat bahosini hisoblovchi algoritim bor. Agar bir soniyada bunday algoritim o'zidan 100 ta variant o'tkazsa, hamma imkoniyatlar va qisqa yo'lni topish uchun unga to'rt asr kerak bo'ladi. Agar bizning xizmatimizda 400 ta kompyuter bo'lsa ham, baribir bunga bir yil ketadi, biz atigi 15 ta shaharni nazarda tutaymiz. 20 ta shahar uchun qisqa yo'lni topish uchun milliard kompyuterlar 9 oy ichida parallel ravishda ishlashi lozim. Bizga tushunarliki, kompyuterlar optimal yechimni topishini kutgandan ko'ra, qanday bo'lsa ham tezroq va arzon sayohat qilish yo'lini topish lozim.

II. Amaliy qism

Grafni bo'yash masalasi

Yuqorida aytib o'tganimizdek, $G = (V, E)$ grafi uchlarini juft-jufti bilan bog'lovchi E qirralar to'plami, V tugunlar yoki cho'qqilar to'plamidan iborat. Bu yerda biz faqat yo'naltirilmagan graflar bilan shug'ullanamiz. Grafning uchlarini butun sonlar bilan belgilanadigan turli ranglarga bo'yash mumkin. Bizni har bir qirraning uchi turli ranglarga bo'yalishi qiziqtiradi. N uchli grafda turli N ranglarga bo'yash mumkin, lekin bunda bo'yoq turini kam sonda ishlatish mumkinmi? Optimallashtirish masalasida bizni graf cho'qqisini bo'yash uchun zarur bo'ladigan bo'yoqlarning minimal miqdori qiziqtiradi. yechimni qabul qilish masalasida bizni cho'qqilarni s yoki kamroq bo'yoqlarga bo'yash mumkinligi qiziqtiradi.

Grafni bo'yash masalasida amaliy ilovalar bor. Agar grafning har bir cho'qqisi kolleжда o'qiladigan kursni bildirsa va cho'qqilar qirralar bilan bog'lansa, agar ikkala kursni tanlovchi talaba bo'lsa, g'oyat murakkab graf hosil bo'ladi.

Agar har bir talaba 5 ta kurs tinglasa, bir talabaga 10 ta qirra to'g'ri keladi. 35000 talabaga 500 kurs to'g'ri keladi, deb faraz qilaylik. U holda hosil bo'lgan grafda 500 cho'qqi va 35000 qirra bo'ladi. Agar imtihonlarga 20 kun ajratilgan bo'lsa, talabaga bir kunda ikkita imtihon to'g'ri kelmasligi uchun graf cho'qqilarini 20 ta ranga bo'yash kerak bo'ladi.

Imtihonlar jadvalini tishlab chiqish graflarni bo'yashga ekvivalentdir. Ammo graflarni bo'yash masalasi NP sinfiga tegishli, shuning uchun jadvalni idrokli vaqtda to'g'ri ishlab chiqish mumkin emas. Bundan tashqari imtihonlarni rejalashtirganda, odatda, talabalarda bir kunda ikkitadan ortiq imtihon bo'lmasligi kerakligi talab etiladi, kursning turli bo'limlari bo'yicha imtihonlar esa bir kunga belgilanadi. Ko'rinib turibdiki, imtihonlarning «mukammal» rejasini ishlab chiqish mumkin emas, shuning uchun qulay rejalarni ishlab chiqish uchun boshqa texnika zarur.

Qutilarga joylashtirish masalasi

Bizda birlik hajmli bir nechta qutilar va turli o'lchamli $S_1, S_2, \dots, S_N$ ob'ektlar to'plami mavjud bo'lsin. Optimallashtirish masalasida bizni barcha ob'ektlarni joylashtirish uchun zarur bo'lgan qutilarning eng kam soni, qaror qabul qilish masalasida esa barcha ob'ektlarni B yoki kam sondagi qutilarga joylash mumkinligi qiziqtiradi.

Bu masala axborotni diskka yoki kompyuterning bo'lakli xotirasiga yozishda, kemaga yukni samarali taqsimlashda, mijozlarning buyurtmasi bo'yicha materialni standart bo'laklarga kesishda paydo bo'ladi. Agar, masalan, bizda katta metal listlar va kichik listlarga buyurtmalar ro'yxati bo'lsa, buyurtmalarni iloji boricha yo'qotishlarsiz taqsimlashni hohlaymiz.

Ryukzakni joylashtirish masalasi

Bizda $S_1, S_2, \dots, S_N$ hajmli $W_1, W_2, \dots, W_N$ narxdagi ob'ektlar to'plami bor. Biz optimallashtirish masalasida biz K hajmli ryukzakni shunday joylashtirishimiz kerakki, uning bahosi maksimal bo'lsin. Qaror qabul qilish masalasida, bizni joylashtirilgan ob'ektning jamlanma bahosi eng kamida W bo'lishiga erishish mumkinligi qiziqtiradi.

Bu masala pul qo'yish strategiyalarini tanlashda paydo bo'ladi: turli pul qo'yishlar bu yerda hajm, ko'zlangan foydaning miqdori – baho, ryukzakning hajmi rejalashtirilgan kapital qo'yilmalar hajmi bilan belgilanadi.

To'plamosti elementlarining yig'indisi masalasi.

Bizda turli o'lchamli $S_1, S_2, \dots, S_N$ ob'ektlar to'plami va qandaydir musbat yuqori chegara L mavjud bo'lsin. Optimallashtirish masalasida biz shunday ob'ektlar to'plamini topishimiz kerakki, ularning o'lchamlari yig'indisi L ga yaqin bo'lib, bu yuqori chegaradan oshmasin. Qaror qabul qilish masalasida L o'lchamlar yig'indisidan iborat ob'ektlar to'plami mavjudligi aniqlanishi kerak. Bu ryukzakni joylashtirish masalasining soddalashtirilgan ko'rinishidir.

KNF – ifodasining chin qiymatligi haqidagi masala

Kon'yuktiv normal forma (KNF) o'zaro AND ($\wedge$ bilan belgilanadi) operatori bilan bog'langan Bul ifodalarining ketma-ketligidan tashkil topgan bo'lib, har bir ifoda OR ($\vee$ orqali belgilanadi) operatori bilan bog'langan Bul o'zgaruvchilarining bajarilishi yoki ularning inkoridan iborat bo'ladi. Quyida kon'yuktiv normal forma (inkor o'zgaruvchining tepasiga chiziqcha qo'yish bilan belgilanadi) sidagi Bul ifodasiga misol keltirilgan:

$$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \wedge (a \vee b \vee c \vee d) \wedge (b \vee c \vee \bar{d}) \wedge (a \vee b \vee c \vee \bar{d} \vee e).$$

Kon'yuktiv normal formadagi Bul ifodasining chinligi masalasi faqat qaror qabul qilish variantida qo'yiladi: ifodaga kiruvchi o'zgaruvchilarda barcha ifodalarning qiymatlarini chinga aylantiruvchi o'rni qo'yishlar mavjudmi? O'zgaruvchilar soni ham, ifodalarning murakkabligi ham cheklanmagan, shuning uchun chin qiymatlar kombinatsiyalari soni juda kata bo'lishi mumkin.

Ishlarni rejalashtirish masalasi

Bizda ishlar to'plami mavjud bo'lsin va bizga ularning har birining yakunlanishi uchun zarur bo'lgan $t_1, t_2, \dots, t_N$ vaqt, bu ishlar tugashi kerak bo'lgan $d_1, d_2, \dots, d_N$ muddat, shuningdek, belgilangan muddatda tugallanmay qolgan har bir ish uchun $p_1, p_2, \dots, p_N$ jarima ma'lum bo'lsin. Optimallashtirish masalasida solinadigan jarimalarni minimallashtiruvchi ishlar tartibi o'rnatilishi talab qilinadi. Qaror qabul qilish masalasida jarimaning miqdori P dan katta bo'lmagan ishlar tartibi mavjudligi so'raladi.

MAVZU BO'YICHA TOPSHIRIQLAR

- NP sinfidagi masalalarni yechishning ikki bosqichli jarayoni bo'yicha quyidagi masala tahlil qilinsin. Javobda masalani yechishdagi barcha elementlarni o'zida mujassamlashtirgan determinallanmagan qadamlar tasvirlangan bo'lishi kerak. Masalan, kommivoyajer haqidagi masalada chiquvchi ma'lumotlar barcha shaharlarga tashrif ro'yxati tartibida tasvirlanishi lozim. Bundan tashqari, tekshirish jarayonini shunday tasvirlash kerakki, siz tomondan taklif qilingan variant haqiqatan ham masala yechimi ekanligi tasdiqlansin.
 - Grafni bo'yash haqidagi masala;
 - Qutilarga joylashtirish haqidagi masala;
 - Ryukzakni qadoqlash haqidagi masala;
 - To'plamosti elementlarining yig'indisi haqidagi masala;
 - KNF-ifoda chinligi haqidagi masala
 - Ishlarni rejalashtirish masalasi.
- Masalaning NP-to'liq ekanligini isbotlashda, bir masala boshqasiga akslantiriladi. Yuqorida ko'rib o'tilgan barcha masalalar NP-to'liq, shuning uchun ularning har biri boshqa ixtiyoriy masalaga keltirilishi mumkin. Quyidagi har bir masalalar juftini mos ravishda biridan ikkinchisiga keltirish akslantirishini yozing.
 - Ryukzakni qadoqlash, qutilarga joylashtirish;
 - Qutilarga joylashtirish, ishlarni rejalashtirish;
 - Ishlarni rejalashtirish, to'plamosti elementlar yig'indisi;
 - To'plamosti elementlar yig'indisi, kommivoyajer;
 - Kommivoyajer, ishlarni rejalashtirish.